5Д

УДК 518.3 / 681.142.2

П.Н. Денисенко
Кировоградский учебно-научный педагогический комплекс (КННПК), Украина
pnden_osvita@yahoo.com

Решение интегральных уравнений в системах компьютерной алгебры

Представлены инструментальные средства для системы алгебраического программирования APS, Maple, Mathematica и других систем компьютерной алгебры. Этими средствами конструируют программы для таких систем. Эти программы имеют следующие вход и выход:

INPUT = ($F[\,y\,] = 0$, $[a,b]$, n), где $F[\,y\,] = f(\,x, y(x), \int_a^b K(x,t, y(t))\,dt\,)$,
OUTPUT = $y_n = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n \approx y(\,x\,) = \mathrm{solve}(\,F[\,y\,] = 0\,)$, $x \in [a,b]$,
$\|\,y(x) - y_n(\mathrm{x})\,\|_{C[a,b]} / \inf_{c_0, \ldots, c_n} \|\,y(x) - (c_0 + \ldots + c_n x^n)\,\|_{C[a,b]} = O(1)$.

Этими инструментальными средствами сконструирована процедура системы APS. Эта процедура решает линейные интегральные уравнения вида

$A\,y + L[\,y\,] + g = 0$, где $A = \mathrm{solve}(B\,y + H[\,y\,] + f = 0)$, $L[y] = K_1[y] + \ldots + K_p[y]$,
$H[y] = K_{p+1}[y] + \ldots + K_s[y]$, $K_i[y] = \int_{c_i(x)}^{d_i(x)} K_i(x,t)\,y(t)\,dt$,

ядра $K_i(x,t)$ и коэффициенты $c_i(x)$, $d_i(x)$, g , B, f – многочлены. Доказана эффективность этой процедуры. Доказана эффективность метода – основания этой процедуры. Процедура доказывает эффективность этих средств.

Введение

Задача. Построить инструментальные средства для системы алгебраического программирования APS, Maple, Mathematica и других систем символьных вычислений на компьютерах – систем компьютерной алгебры (СКА). Этими средствами конструируют программы для таких систем. Эти программы имеют следующие вход и выход:

$$\text{INPUT} = (F[y] = 0,\ [a,b],\ n), \text{ где } F\,[y] = f(\,x, y(x), \int_a^b K(\,x,\,t,\,y(t))\,dt), \quad (1)$$

$$\text{OUTPUT} = y_n = c_0 + c_1\,x + \ldots + c_n\,x^n \approx y(x) = \mathrm{solve}(F[\,y\,] = 0),\ x \in [a,b]. \quad (2)$$

Коэффициент оптимальности алгоритма, реализованного в такой программе, на интегральном уравнении (1) в пространстве $X = C_{[a,b]}$ ограничен

$$C_n(\text{algorithm}, F[y] = 0, X) = \|y - y_n\|_X / \inf_{c_0, \ldots, c_n} \|\,y(x) - (c_0 + \ldots + c_n\,x^n)\,\|_X = O(1). \quad (3)$$

Актуальность задачи. Maple, Mathematica и другие СКА вычисляют решение обыкновенных дифференциальных уравнений в аналитическом виде.

СКА не решают аналитически функциональные уравнения других типов.

Интегральные уравнения моделируют явления окружающего нас мира более широкого класса, чем обыкновенные дифференциальные уравнения.

Возможности классического математического обеспечения. Программно реализованы, как правило, методы с насыщением. По этим программам вычисляют сеточную аппроксимацию $\{y_i \approx y(x_i)\}_{i=0}^n$ решения $y(x)$ интегрального уравнения. Для исследования этого сеточного решения $\{y_i \approx y(x_i)\}_{i=0}^n$ на отрезке $[a,b]$ его интерпо-

лируют – преобразуют в алгебраический многочлен $P_n[\{y_i\}_{i=0}^n]$. Если функция y – не целая и узлы сетки $\{x_i\}_{i=0}^n$ – равноотстоящие на отрезке $[a,b]$, то с ростом n алгебраический многочлен $P_n[\{y(x_i)\}_{i=0}^n]$ (интерполирующий функцию y в этих узлах) часто не сходится к функции y в пространстве $C_{[a,b]}$.

Методы ряда Чебышева решают интегральные уравнения [1, с. 275-348] и вычисляют аппроксимацию частной суммы ряда Фурье – Чебышева решения. СКА не выполняют преобразования этих методов.

1 Инструментальные средства

1. Операторы на языке APLAN системы алгебраического программирования APS. Эти операторы выполняют преобразования a-метода Дзядыка [2].

2. Процедуры из этих операторов для решения линейных интегральных уравнений

$$A\, y + L[y] + g = 0, \qquad (4)$$

где интегральный оператор имеет вид

$$L[y] = K_1[y] + \ldots + K_p[y],\ K_i[y] = \int_{c_i(x)}^{d_i(x)} K_i(x,t)\, y(t)\, dt, \qquad (5)$$

ядра $K_i(x,t)$, коэффициенты $c_i(x)$, $d_i(x)$, A и свободный член g – многочлены (линейные интегральные уравнения с многочленными коэффициентами – ЛИУМК) следующих типов:

– без особенности на отрезке аппроксимации $[a,b]$ [3],

– с одной регулярной особой точкой ноль.

3. Метод конструирования процедур для решения интегральных уравнений:

– аппроксимация исходного уравнения последовательностью ЛИУМК (4),

– решение ЛИУМК этой последовательности по указанной выше процедуре.

2 Решение интегральных уравнений типа А5

$$\mathrm{INPUT} = (A\, y + L[y] + g = 0,\ A = \mathrm{solve}(B\, y + H[y] + f = 0),\ [a,b],\ n), \qquad (6)$$

где g, f, B – многочлены, $L[y]$, $H[y]$ – операторы вида (5).

Метод 1. Распространение a-метода Дзядыка решения ЛИУМК Вольтерра [2].

1. По методу [3] преобразовать ЛИУМК $B\, y + H[y] + f = 0$ системы (6) в многочлен

$$A_n = \mathrm{method_}_{[3]}(B\, y + H[y] + f = 0,\ [a,b],\ n). \qquad (7)$$

2. Преобразовать уравнение $A\, y + L[\, y\,] + g = 0$ системы (6) в ЛИУМК

$$A_n\, y + L[y] + g = 0. \qquad (8)$$

3. По методу [3] преобразовать ЛИУМК (8) в многочлен

$$y_n = \mathrm{method}_{[3]}(A_n\, y + L[y] + g = 0,\ [a,b],\ n). \qquad (9)$$

Алгоритм 1.

1. По алгоритму [3] преобразовать ЛИУМК $B\, y + H[y] + f = 0$ (6) в многочлен

$$A_n = \mathrm{algorithm}_{[3]}(B\, y + H[y] + f = 0,\ [a,b],\ n\,). \qquad (10)$$

2. Преобразовать уравнение $A\, y + L[\, y\,] + g = 0$ системы (6) в ЛИУМК

$$A_n\, y + L[y] + g = 0. \qquad (11)$$

3. По алгоритму [3] преобразовать ЛИУМК (11) в многочлен

$$y_n = \text{algorithm}_{[3]}(A_n\, y + L[y] + g = 0,\ [a,b],\ n). \qquad (12)$$

Лемма 1. Метод 1 эквивалентен алгоритму 1 – тождественны многочлены y_n (9) и (12).

Доказательство. Согласно определению метода [3] и алгоритма [3], многочлен A_n (10) тождественен многочлену A_n (7). Поэтому тождественны уравнения (8) и (11).

Следовательно, согласно определению метода [3] и алгоритма [3], многочлен y_n (12) тождественен многочлену y_n (9).

Из спецификации алгоритма 1 и алгоритма [3] следует такое утверждение.

Лемма 2. Все преобразования алгоритма 1 – алгебраические.

Структура данных на входе APLAN-процедуры.

1. ЛИУМК $B\,y + H[y] + f = 0$ системы (6) имеет вид требуемый процедурой [3]

*LIUMK := B * y + int_op(c_1 , d_1 , K_1 * y , t) +*
*. . . + int_op(c_s , d_s , K_s * y , t) + f = 0,* (13)

где y, t – атомы. Эта процедура решает ЛИУМК. Ядра K_1,...,K_s – термы, имеют естественный вид и аргументы x , t – атомы.

Коэффициент B, сводный член g и пределы интегрирования c_1,...,c_s, d_1,..., d_s – термы, имеют естественный вид и аргумент x – атом.

2. Уравнение $A\,y + L[y] + g = 0$ системы (6) определяет оператор

*Ly: = int_op(c_1, d_1, K_1 * y, t) +…+ int_op(c_p, d_p, K_p * y, t) + g.*

3. Отрезок аппроксимации [a, b] определяет список (a, b) .

4. Параметр n является целым числом.

APLAN-процедура 1. Алгебраическая спецификация алгоритма 1.

```
A_n := solve_i_u(LIUMK,interval,n); /* A_n */
LIUMK_1 := (A_n * y + Ly = 0); /* A_n * y + L[y] + g = 0 */
y_n := solve_i_u(LIUMK_1,interval,n); /* y_n */
```

Замечание 1. APLAN-процедура solve_i_u – реализация алгоритма [3].

Структура выхода операторов APLAN-процедуры.

1. Многочлен A_n (10) имеет коэффициенты – числа и вид

d + e * x +…+ f * x ^ n. (14)

2. Уравнение LIUMK_1 (11) имеет вид (13).

3. Многочлен y_n (12) имеет коэффициенты – числа и вид (14).

3 Эффективность APLAN-процедуры

Теорема 1. *Для сложности APLAN-процедуры справедливо тождество*

$$Q(\text{ algorithm_1}(A\,y + L[y] + g = 0,\ A = \text{solve}(B\,y + H[\,y\,] + f = 0),\ [a,b],\ n)) =$$
$$O(1) + Q(\textbf{solve_i_u}\ (B\,y + H[y] + f = 0,\ [a,b],\ n)) +$$
$$Q(\textbf{solve_i_u}\ (A_n y + L[y] + g = 0,\ [a,b],\ n))\ ,$$

где $Q($ **solve_i_u** $(B\,y + H[y] + f = 0, [a,b], n))$ – *(полиномиальная) сложность решения ЛИУМК* $B\,y + H[y] + f = 0$ *процедурой* **solve_i_u** [3].

Доказательство. APLAN-процедура 1 – линейная. Сложность линейной процедуры тождественна сумме сложности её частей. Сложность формирования ЛИУМК (8)

не зависит от параметра n. Согласно оценке [3], процедура **solve_i_u** имеет полиномиальную сложность.

Теорема 2. *Пусть числа – константы операндов входа APLAN-процедуры являются целыми или рациональными.*

Тогда APLAN-процедура выполняет преобразования алгоритма 1 точно.

Доказательство. Согласно лемме 2, преобразования алгоритма 1 – только алгебраические. При алгебраических преобразованиях система APS (и другие СКА) выполняет арифметические операции с целыми и рациональными числами (константами операндов этих преобразований) точно.

Модельное интегральное уравнение метода ряда Чебышева [1 с. 305]

$$A\, y - \int_0^x (x - t)\, y(t)\, dt - x = 0, \tag{15}$$

$$A = \text{solve}(y + 4 \int_0^x (x-t)\, y(t)\, dt - 1/2\, x^2 - 1/2 = 0) = \cos(x)^2/2. \tag{16}$$

Описание системы уравнений (15), (16) на языке APLAN.

```
process[1] := (LIUMK := (y + (-1/2) × x ^ 2 + (-1/2) +
int_op (0, x, (4 × (x + -1 × t)) x y, t) = 0) ;
Ky := int_op(0, x, (-1 × (x + -1 × t)) ×x y, t) + -1 × x; ...);
```

Результаты решения системы (15), (16) процедурой.

n := 3; interval := (-1, 1) ;

```
A_n = rat(-6,17) × x ^ 2 + rat(33,68) ;
LIUMK_1 = (rat(-6,17) × x ^ 2 + rat(33,68)) × y +
int_op (0, x, (-1 × (x + -1 × t)) × y, t) + -1 × x = 0 );
y_n = rat(57664,6271) × x ^ 3 + rat(-2040,6271) × x ;
```

4 Эффективность алгоритма 1

Построенная выше APLAN-процедура и теоремы 1, 2 доказывают следующие утверждения.

Теорема 3. *Сложность алгоритма 1 – полиномиальная по параметру n.*

Теорема 4. *Пусть числа – константы операндов входа алгоритма 1 являются целыми или рациональными.*

Тогда СКА выполняют преобразования этого алгоритма точно.

Коэффициенты Фурье – Чебышева решения уравнения (15)

$$y(x)= \text{solve}(\cos(x)^2/2\, y - \int_0^x (x - t)\, y(t)\, dt - x = 0) = 2\, \text{tg}(x) / \backslash\cos(x)^2 \tag{17}$$

на отрезке [-1,1] принимают следующие значения $a_{2\,i}(y, [-1,1]) = 0$,

$$\{a_{2i+1}(y, [-1,1])\}_{i=0}^{10} = \{7{,}3,\ 2{,}6,\ 0{,}65,\ 0{,}14,\ 0{,}027,\ 0{,}0049,\ 0{,}00084,\ 0{,}00014,\ 2{,}3\ 10^{-5},\ 3{,}6\ 10^{-6},\ 5{,}6\ 10^{-7},\ 8{,}4\ 10^{-8}\} \tag{18}$$

и регулярно убывают с ростом параметра $2\, i + 1$

$$|a_{2i+3}(y, [-1,1])| / |a_{2i+1}(y, [-1,1])| = q_i,$$
$$\{q_i\}_{i=0}^{9} = \{0{,}36,\ 0{,}25,\ 0{,}22,\ 0{,}19,\ 0{,}18,\ 0{,}17,\ 0{,}167,\ 0{,}164,\ 0{,}156,\ 0{,}155,\ 0{,}15\}\ .$$

Следовательно, справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots, c_n} \|\, y(x) - (c_0 + \ldots + c_n\, x^n)\, \|_{C[-1,1]} = |a_{2\,[(n+1)/2]+1}(y, [-1,1])\,|\,(1 + \beta_n),$$
$$\text{где } \beta_n < 1/(1 - q_{[(n-1)/2]}),\ \{1/(1 - q_i)\}_{i=0}^{9} = \{0{,}6,\backslash\ 0{,}3,\ \ldots,\ 0{,}17\}. \tag{19}$$

Норма в пространстве $X = C_{[-1,1]}$ погрешности аппроксимации многочленом $y_n =$ $= \text{algurithm}_1(A\,y - \int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt - x = 0,\ y + 4\int_0^x (x\text{-}t)\,y(t)\,dt - 1/2\,x^2 - 1/2 = 0,\ [-1,1],\ n)$ решения y (17) уравнения (15) принимает следующие значения

$$\{\|\,y - y_{2i+1}\,\|_X = \|\,y - y_{2i+2}\,\|_X\,\}_{i=0}^{5} = \{6{,}7,\ 1{,}8,\ 0{,}25,\ 0{,}062,\ 0{,}0093,\ 0{,}0017\}. \quad (20)$$

Из тождеств (18), (19) и (20) следуют заключения.

Вывод 1. *Главной частью коэффициента оптимальности (3) алгоритма 1 на интегральном уравнении (15) в пространстве* $X = C_{[-1,1]}$ *является отношение*

$$\|y - y_n\|_{C[-1,1]} \,/\, |\,a_{2\,[(n-1)/2]\,+\,1}(y,\ [-1,1])\,| = C + \alpha_{2[(n-1)/2]+1},$$

где $\{C + \alpha_{2i+1}\}_{i=0}^{5} = \{2{,}6,\ 2{,}8,\ 1{,}8,\ 2{,}3,\ 1{,}9,\ 2\}$.

Вывод 2. *Для коэффициента оптимальности (3) алгоритма 1 на уравнении (15) в пространстве* $C_{[-1,1]}$ *справедливо тождество*

$$C_n(\text{ algorithm_1, equation (15)},\ C_{[-1,1]}) = (C + \alpha_{2[(n-1)/2]+1})\,/\,(1 + \beta_n)\ ,$$

где $\beta_n < 1/(1 - q_{[(n-1)/2]})$, $\{1/(1 - q_i)\}_{i=0}^{9} = \{0{,}6,\backslash\ 0.3,\ \ldots,\ 0{,}17\}$.

Замечание 2. *Минимальное значение коэффициента оптимальности алгоритма преобразования системы уравнений (6) в алгебраический многочлен* – 1.

Замечание 3. *Коэффициент оптимальности метода ряда Чебышева на задаче Коши, эквивалентной системе (15), (16), принимает близкие значения* [1, с. 306].

5 Вариант применения метода Галеркина

$$\text{INPUT} = (A\,y + L[y] + g = 0\ ,\ A = \text{solve}(B\,y + H[y] + f = 0),\ [a,b],\ n)\ ,$$

$$\text{OUTPUT} = \text{Galerkin}(A\,y + L[y] + g = 0,\ A = \text{solve}(B\,y + H\,[y] + f = 0),\ [a,b],\ n) =$$
$$y_n = \text{solve}(S_n[A_n\,(y_n \in H_n[a,b]) + H[\,(y_n \in H_n[a,b])] + g] = 0),$$
$$A_n = \text{solve}(S_n[B\,(y_n \in H_n[a,b]) + \text{H}[(y_n \in H_n[a,b])] + f] = 0). \quad (21)$$

где $S_n[y] = a_0(y,\ [a,b])\ \text{cheb}(0,z(x)) + \ldots + a_n(y,\ [a,b])\ \text{cheb}(n,z(x)) : L_2(a,b;\rho) \to H_n[a,b]$

$$\text{cheb}(\ i,\ x\ ) = \cos(i\ \arccos(\ x)),\ z(x) = 2\ (x\text{-}a)\ /\ (b\text{-}a) - 1,$$
$$(y_n \in H_n[a,b]) = c_0\ \text{cheb}(0,z(x)) + \ldots + c_n\ \text{cheb}(n,z(x)),\ c_0,\ldots,\ c_n \in \text{Atom}\ .$$

Метод 2.

1. По методу Галеркина в пространстве $L_2(a,b;\rho)$ преобразовать ЛИУМК $B\,y +$ $+ H[y] + f = 0$ системы (6) в многочлен

$$A_n = \text{Galerkin_}\ L_2(a,\ b;\rho)(B\,y + H[y] + f = 0,\ [a,b],\ n). \quad (22)$$

2. Преобразовать уравнение $A\,y + L[y] + g = 0$ системы (6) в уравнение вида (8) с многочленом A_n (22)

$$A_n\,y + L[y] + g = 0. \quad (23)$$

3. По методу Галеркина в пространстве $L_2(a,b;\rho)$ преобразовать уравнение (23) в искомый многочлен

$$y_n = \text{Galerkin_}\ L_2(a,b;\rho)\ (A_n\,y + L[y] + g = 0,\ [a,b],\ n). \quad (24)$$

6 Алгоритм – реализация метода 2

$$\text{INPUT} = (A\,y + L[y] + g = 0,\ A = \text{solve}(B\,y + H[y] + f = 0),\ [a,b],\ n).$$

Алгоритм 2.

1. Преобразовать ЛИУМК $B\,y + H[y] + f = 0$ системы (6) в многочлен

$$A_n = \text{solve}(S_n[B\,(y_n \in H_n[a,b]) + \text{H}\ [(y_n \in H_n[a,b])] + f = 0). \quad (25)$$

2. Преобразовать уравнение $A\ y + L[y] + g = 0$ системы (6) в уравнение вида (8) с многочленом A_n (25)

$$A_n\ y + L[y] + g = 0. \qquad (26)$$

3. Преобразовать ЛИУМК (26) в многочлен

$$\text{algorithm_2}(A\ y + L[y] + g = 0,\ A = \text{solve}(B\ y + H[\ y\ ] + f = 0),\ [a,b],\ n) =$$
$$\text{OUTPUT} = y_n = \text{solve}(S_n[\ A_n\ (y_n \in H_n[a,b]) + L[\ (y_n \in H_n[a,b])] + g] = 0). \qquad (27)$$

Лемма 3. *Метод 2 эквивалентен алгоритму 2 – тождественны многочлены (21) и (27).*

Доказательство. Согласно определению метода Галеркина в пространстве $L_2\,(a,b;\rho)$, многочлен A_n (25) тождественен многочлену A_n (22). Поэтому тождественны уравнения (23) и (26). Следовательно, согласно определению метода Галеркина в пространстве $L_2(a,b;\rho)$, многочлен y_n (21) тождественен многочлену y_n (27).

Оптимальность алгоритма 2. В пространстве $L_2(a,b;\rho)$ оператор S_n (21) – наилучший аппарат для аппроксимации функций $(y(x),\ x \in [a,b]) \in L_2(a,b;\rho)$ алгебраическими многочленами – справедливы тождества

$$\|y - S_n[y]\|_{L2(a,b;\rho)} = \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|\ y(x) - (c_0 + \ldots + c_n\, x^n)\ \|_{L2(a,b;\rho)},\ \|S_n\|_{L2(a,b;\rho)} = 1\ .$$

Определение 1. *Система уравнений (6) принадлежит классу* A'_5 . <=>
Коэффициент оптимальности (3) варианта (21) метода Галеркина в пространстве $L_2(a,b;\rho)$ *на этой системе уравнений в пространстве* $X = C_{[a,b]}$ *ограничен*

$$C_n(\text{Galerkin},\ A\ y + L[y] + g = 0,\ A = \text{solve}(B\ y + H[y] + f = 0),\ X) = \|\ y(x) - y_n(x)\ \|_X\ /$$
$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|\ y(x) - (c_0 + \ldots + c_n\, x^n)\ \|_X = O(1)\ .$$

В пространстве $C_{[a,b]}$ оператор S_n – оптимальный среди операторов проектирования функций $(y(x),\ x \in [a,b]) \in C_{[a,b]}$ в пространство алгебраических многочленов и справедливо тождество

$$\|\ S_n\ \|_{C[a,b]} = (4/\pi^2)\ \ln(n) + O(1),\ O(1) < 3.$$

Поэтому класс A'_5 систем уравнений вида (6) достаточно широкий.

Класс A'_5 оценивают условия основной теоремы сходимости метода Галеркина (21).

7 Оптимальность метода 1

Лемма 4. *Аппроксимация ЛИУМК* $A\ y + L[\ y\ ] + g = 0$ (4) по методу [3]

$$A\ (y_n \in P_n) + L[y_n \in P_n] + g + (E_{m,n} \in H_{m\backslash n}\ [a,b]) = 0, \qquad (28)$$

$$\text{где } m = \deg(A\ (y_n \in P_n) + L[\ y_n \in P_n\ ] + g\ ) \qquad (29)$$

$$(y_n \in P_n) = c_0 + c_1\,x + \ldots + c_n\,x^n,\ c_0,\ c_1,\ldots,\ c_n \in \text{Atom}, \qquad (30)$$

$$(E_{m,n} \in H_{m\backslash n}\ [a,b]) = \tau_1\ \text{cheb}\ (n{+}1, z(x)) + \ldots + \tau_{m-n}\ \text{cheb}(m, z(x)),\ \tau_1,\ldots,\tau_{m-n} \in \text{Atom}, \qquad (31)$$

эквивалентна системе:

– аппроксимация этого ЛИУМК по методу Галеркина в пространстве $L_2(a,b;\rho)$

$$S_n[A\ (y_n \in H_n[a,b]) + L[\ (y_n \in H_n[a,b])] + g] = 0, \qquad (32)$$

– система уравнений

$$\{a_i(A\ y_n + L[\ y_n\ ] + g,\ [a,b]\ ) + \tau_{i-n} = 0\ \}_{\ i\,=\,n+1}^{\ m}, \qquad (33)$$

$$\text{где } y_n = \text{solve}(S_n[A\ (y_n \in H_n[a,b]) + L[(y_n \in H_n[a,b])] + g] = 0) \qquad (34)$$

Доказательство. Для ЛИУМК (4) левая часть уравнения (28) – многочлен порядка m (29). Многочлен P_m – порядка m тождественен нулю тогда и только тогда, когда нулю тождественны его коэффициенты Фурье – Чебышева порядка

$i = 0,\dots,m$ на отрезке $[a,b]$ – $a_i(P_m, [a,b]) = 0$, $i = 0,\dots,m$.

Следовательно, уравнение (28) эквивалентно системе уравнений

$$\{a_i(A\ (y_n \in P_n\ ) + L[y_n \in P_n\ ] + g + (\ E_{m,n} \in H_{m\backslash n}\ [a,b]), [a,b]\ ) = 0\}_{i=0}^{m} \qquad (35)$$

относительно коэффициентов многочленов

$$(y_n \in P_n\ )\ (30)\ \text{и}\ (E_{m,n} \in H_{m\backslash n}\ [a,b]) \qquad (36)$$

Функционал $a_i(P_m, [a,b])$ – линейный и для него справедливо тождество

$$a_i(c_0\ \mathrm{cheb}(0,z(x)) +\dots+ c_i\ \mathrm{cheb}(i,z(x)) +\dots+ c_n\ \mathrm{cheb}(n,z(x)), [a,b]) = c_i.$$

Следовательно, справедливы тождества

$$a_i((E_{m,n} \in H_{m\backslash n}\ [a,b]), [a,b]) = 0,\ i = 0,\dots, n,$$
$$a_i((E_{m,n} \in H_{m\backslash n}\ [a,b]), [a,b]) = \tau_{m-i},\ i = n+1,\dots, m.$$

Поэтому первые $n + 1$ уравнения системы (35) имеют вид

$$a_i(A\ (y_n \in P_n\ ) + L[\ y_n \in P_n\ ] + g, [a,b]) = 0,\ i = 0,\dots, n. \qquad (37)$$

Элементы пространства $H_n[a,b]$ – алгебраические многочлены порядка n и только эти многочлены. Поэтому многочлен y_n (34) тождественен многочлену

$$y_n = \mathrm{solve}(\ S_n[\ A\ (y_n \in P_n\ ) + L[y_n \in P_n\ ] + g] = 0),\ S_n : L_2(a,b;\rho) \to H_n[a,b]. \qquad (38)$$

Следовательно:
– уравнение (37) эквивалентно системе уравнений (36),
– решение системы (36) – коэффициенты многочлена y_n (37),
– результат подстановки многочлена y_n (37) в систему уравнений (35) вместо $y_n \in P_n$) – система уравнений (33) и $n + 1$ тождество $0 = 0$.

Лемма 5. *Пусть уравнение* $A\ y + L[\ y\ ] + g = 0$ (4) *– ЛИУМК.*

Тогда на этом уравнении алгоритм [3] *эквивалентен методу Галеркина в пространстве* $L_2(a,b;\rho)$ *– тождественны многочлены* y_n (34) *и*

$$y_n = \mathrm{method}_{[3]}\ (A\ y + L[y] + g = 0, [a,b], n). \qquad (39)$$

Доказательство. Согласно лемме 4, уравнение (28) эквивалентно системе: уравнение (32) и система уравнений (33).

Уравнение (32) является аппроксимацией уравнения (4) по методу Галеркина в пространстве $L_2(a,b;\rho)$.

Уравнение $i = 1,\dots,m\text{-}n$ системы (33) определяет коэффициент τ_i через коэффициенты многочлена y_n (34). Следовательно:
– уравнения (33) являются тождествами,
– многочлен y_n (38) тождествен решению y_n (34) уравнения (32).

Лемма 6. *Алгоритм 1 эквивалентен алгоритму 2 – тождественны многочлены* y_n (12) *и* (27).

Доказательство. Согласно лемме 5, тождественны многочлены A_n (25) и (10).

Поэтому тождественны уравнения (11) и (26).

Следовательно, согласно лемме 5, тождественны многочлены y_n (12) и (27).

Теорема 5. *Метод* 1 *эквивалентен методу* 2 *– тождественны многочлены* y_n (9) *и* (21).

Доказательство. Согласно лемме 1, тождественны многочлены y_n (9) и (12).

Согласно лемме 6, тождественны многочлены y_n (12) и (27).

Согласно лемме 3, тождественны многочлены y_n (27) и (21).

Теорема 6. *Пусть система уравнений (6) принадлежит классу* A'_5 .

Тогда коэффициент оптимальности (3) *алгоритма 1 на этой системе уравнений в пространстве* $X = C_{[a,b]}$ *ограничен.*

$$C_n(\text{ algorithm_1}, A\,y + L[y] + g = 0, A = \text{solve}(\,B\,y + H[\,y\,] + f = 0), X\,) = \\ \|\, y - y_n \,\|_X / \inf_{c_0,\,\ldots,\,c_n} \|\, y(x) - (c_0 + \ldots + c_n\, x^n)\, \|_X = O \qquad (1).$$

Доказательство. Согласно лемме 6, тождественны многочлены y_n (12) и (27).

Согласно лемме 3, тождественны многочлены y_n (27) и (21). По определению 1 класса A'_5 , коэффициент оптимальности метода Галеркина в пространстве $L_2(a,b;\rho)$ (21) на системе уравнений этого класса в пространстве $C_{[a,b]}$ ограничен.

Заключение

Построенная APLAN-процедура доказывает эффективность представленных инструментальных средств для создания процедуры СКА для решения интегральных уравнений отдельного типа.

Эта APLAN-процедура в случае системы интегральных уравнений вида (6) решает задачу Дзядыка [2]. *На основании а-метода построить эффективные алгоритмы для вычисления алгебраических многочленов – аппроксимации решения* $y(x)$, $x \in [a.b]$ *функциональных уравнений оптимальной в пространстве* $C_{[a,b]}$.

Дополнение

1. **Алгоритм 1'.** Модификация алгоритма 1. В алгоритме [3] базис пространства $L_2(a,b;\rho)$ заменен на базис пространства Гильберта $H_{[a,b]}$.

2. Для алгоритма 1' имеют место аналоги теорем 5 и 6. В этих аналогах пространство $L_2(a,b;\rho)$ заменено на пространство $H_{[a,b]}$.

3. **Модификация APLAN-процедуры.** Реализация алгоритма 1'. Реализация алгоритма [3] заменена реализацией модификации этого алгоритма с базисом пространства $H_{[a,b]}$.

4. Распространение алгоритма 1 на интегральные уравнения вида (6), где коэффициенты – решения ЛИУМК (4) или многочлены, эквивалентно соответствующему варианту метода Галеркина в пространстве $L_2(a,b;\rho)$.

5. **Этими инструментальными средствами мы построили процедуры** для решения интегральных уравнений вида

$$A\,y + L[y] + g = f(x, H[\text{y}]) \text{ и } A\,y + L[y] + g = H[f(\,x, \text{y})],$$

где L, H – линейные интегральные операторы вида (5) с многочленными коэффициентами и нелинейность – $f(x, \text{y})$ – функция или многочлен.

Эти процедуры вычисляют многочлен y_n – аппроксимацию решения исходного уравнения оптимальную (3) в пространстве $C_{[a,b]}$.

Литература

1. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / Пашковский С. – М. : Наука, 1983. – 384 с.
2. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / Дзядык В.К. – Киев : Наукова думка, 1988. – 304 с.

3. Денисенко П.Н. Оптимальное решение интегральных уравнений в APS / П.Н. Денисенко // Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень. Т. 1. – К. : Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАНУ, 2001. – С. 124-130.

П.М. Денисенко
Розв'язування інтегральних рівнянь в системах комп'ютерної алгебри
Представлено інструментальні засоби для системи алгебраїчного програмування APS, Maple, Mathematica та інших систем комп'ютерної алгебри. Цими засобами конструюють комп'ютерні програми для таких систем. Ці програми мають наступні вхід та вихід:

INPUT = ($F[y] = 0$, $[a,b]$, n), где $F[y] = f(x, y(x), \int_a^b K(x,t, y(t))\, dt)$,
OUTPUT = $y_n = c_0 + c_1 x + ...+ c_n x^n \approx y(x)$ = solve($F[y] = 0$), $x \in [a,b]$,
$\| y(x) - y_n(x) \|_{C[a,b]} / \inf_{c_0, \ldots, c_n} \| y(x) - (c_0 + \ldots + c_n x^n) \|_{C[a,b]} = O(1)$.

Цими засобами сконструйована процедура системи APS. Ця процедура розв'язує лінійні інтегральні рівняння виду

$A y + L[y] + g = 0$, де A = solve($B y + H[y] + f = 0$), $L[y] = K_1[y] +\ldots+ K_p[y]$,
$H[y] = K_{p+1}[y] + \ldots + K_s[y]$, $K_i[y] = \int_{c_i(x)}^{d_i(x)} K_i(x,t)\, y(t)\, dt$,

ядра $K_i(x,t)$ и коефіцієнти $c_i(x)$, $d_i(x)$, g, B, f – багаточлени. Доведена ефективність процедури. Доведена ефективність алгоритму та методу – основ процедури. Ця процедура доводить ефективність побудованих засобів.

P.N. Denisenko
The Integral Equations Solving in the Computer Algebra Systems
We presented the efficient mathematical apparatus (the tools) for the Algebraic Programming System (APS), Maple, Mathematica and other computer algebra systems. This tools construct the computer programs. These programs have:

INPUT = ($F[y] = 0$, $[a,b]$, n), где $F[y] = f(x, y(x), \int_a^b K(x,t, y(t))\, dt)$,
OUTPUT = $y_n = c_0 + c_1 x + ...+ c_n x^n \approx y(x)$ = solve($F [y] = 0$), $x \in [a,b]$,
$\| y(x) - y_n(x) \|_{C[a,b]} / \inf_{c_0, \ldots, c_n} \| y(x) - (c_0 + \ldots + c_n x^n) \|_{C[a,b]} = O(1)$.

Using these tools we constructed the procedure for APS. This procedure solves the linear integral equations

$A y + L[y] + g = 0$, where A = solve($B y + H[y] + f = 0$), $L[y] = K_1[y] +\ldots+ K_p[y]$,
$H[y] = K_{p+1}[y] + \ldots + K_s[y]$, $K_i[y] = \int_{c_i(x)}^{d_i(x)} K_i(x,t)\, y(t)\, dt$,

the kerns $K_i(x,t)$ and the coefficients $c_i(x)$, $d_i(x)$, g , B , f – the polinomials. We proved the efficiency of this procedure. We proved the efficiency of this method which is the basis for this procedure. This procedure proves the efficiency of these tools.

Статья поступила в редакцию 14.06.2010.